(Option agronomie - Option biochimie-biologie)

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$, et soit f, fonction numérique indéfiniment dérivable, définie sur $[a, b]$. On rappelle que $\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire orientée comprise d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$, d'autre part entre les deux droites verticales $x = a$, $x = b$. Le but de ce problème est d'évaluer un majorant de l'erreur commise

si l'on remplace, dans le calcul de $\int_a^b f(t)\,dt$, la fonction f par des fonctions simples.

Si n est un entier naturel au moins égal à 1, on définit le découpage de $[a, b]$ en n intervalles égaux par la suite :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 , \dots , < x_{n-1} < x_n = b ,$$

avec $x_k = a + k\dfrac{(b-a)}{n}$, et par conséquent $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$.

1

1.1. Soient $\alpha < t < \beta$ trois nombres quelconques tels que $\alpha < t < \beta$, dans l'intervalle $[a, b]$. Calculer la constante K de manière que la fonction :

$$\varphi(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}[f(\beta) - f(\alpha)] - K(x-\alpha)(\beta - x)$$

s'annule en t. K et φ étant ainsi définis, montrer qu'il existe alors $\xi \in]\alpha, \beta[$ tel que $\varphi''(\xi) = 0$.

En déduire que $|K| \leqslant \dfrac{1}{2} \sup\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

1.2. Déduire de la question précédente la formule :

pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\left| f(t) - f(\alpha) - \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}[f(\beta) - f(\alpha)] \right| \leqslant \frac{1}{2}(t-\alpha)(\beta - t)\,M_2$$

où $$M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| .$$

1.3. Démontrer l'égalité : $$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(t-\alpha)(\beta - t)\,dt = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 .$$

1.4. Soit alors g la fonction numérique, définie sur $[a, b]$ de manière que sa représentation graphique soit formée des n segments de droite $A_{k-1}A_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, où A_k désigne le point de coordonnées $(x_k ; f(x_k))$.

Donner l'expression analytique de g sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

Calculer $\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)\,dt$, et donner grâce à (1.2.) et (1.3.) un majorant de $$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(t) - g(t)]\,dt \right| .$$

Calculer $\int_a^b g(t)\,dt$ et montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right] \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} M_2 .$$

Tournez la page S.V.P.

2.1. Soient $\alpha < \beta < \gamma$ trois nombres réels ainsi ordonnés, distincts, pris dans l'intervalle $[a, b]$.

a. Quelle est la fonction polynômiale de degré au plus égal à 2, nulle pour $x = \alpha$, nulle pour $x = \beta$, et égale à 1 pour $x = \gamma$?

b. Montrer l'existence de q, fonction polynômiale de degré au plus égal à 2, telle que : $q(\alpha) = f(\alpha)$, $q(\beta) = f(\beta)$, $q(\gamma) = f(\gamma)$.

2.2. Dans cette question, on suppose $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$.

Montrer que la formule :

$$\int_\alpha^\gamma \theta(t)\,dt = \frac{\gamma - \alpha}{6}[\theta(\alpha) + 4\theta(\beta) + \theta(\gamma)]$$

est vraie pour $\theta(t) = 1$ (constante), $\theta(t) = t$, $\theta(t) = t^2$.

En déduire $\displaystyle\int_\alpha^\gamma q(t)\,dt$.

2.3. q désignant la fonction du (2.1.) montrer l'existence d'une constante k, que l'on exprimera à l'aide de f' et q', telle que la fonction h :

$$h(t) = k(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma) + q(t)$$

vérifie la relation $h'(\beta) = f'(\beta)$.

2.4. Soit h la fonction ainsi définie et soit $t \in]\alpha, \beta[\cup]\beta, \gamma[$. On pose, pour tout x :

$$\phi(x) = f(x) - h(x) + K(x - \alpha)(x - \beta)^2(x - \gamma),$$

où K est une constante. Déterminer la valeur qu'il faut attribuer à K pour que l'on ait $\phi(t) = 0$. Calculer $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$, $\phi(\gamma)$, $\phi'(\beta)$, et en déduire l'existence de :

$$\xi \in]\alpha, \gamma[\quad \text{tel que} \quad K = -\frac{1}{24} f^{(4)}(\xi).$$

2.5. En déduire, pour tout $t \in [\alpha, \gamma]$, l'inégalité :

$$|f(t) - h(t)| \leqslant \frac{M_4}{24}(t - \alpha)(t - \beta)^2(\gamma - t)$$

où $$M_4 = \sup_{x \in [\alpha, \gamma]} |f^{(4)}(x)|.$$

2.6. Dans cette question, on a de nouveau $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$.

Vérifier que : $\displaystyle\int_\alpha^\gamma (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)\,dt = 0$;

calculer $\displaystyle\int_\alpha^\gamma (t - \alpha)(t - \beta)^2(\gamma - t)\,dt$,

et en déduire :

$$\left| \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt - \frac{\gamma - \alpha}{6}(f(\alpha) + 4f(\beta) + f(\gamma)) \right| \leqslant \frac{M_4}{24} \cdot \frac{(\gamma - \alpha)^5}{120}.$$

2.7. On suppose ici $n = 2p$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

On définit la fonction numérique g_1 sur l'intervalle $[a, b]$ de la manière suivante :

Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, la restriction de g_1 à l'intervalle $[x_{2k-2}; x_{2k}]$ est la fonction polynômiale du second degré qui coïncide avec f pour les trois valeurs x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}.

Calculer $\displaystyle\int_a^b g_1(t)\,dt$ en fonction des $f(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ et donner une majoration de $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g_1(t)\,dt \right|$ à l'aide de la formule du (2.6.).

---==oOOo==---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail